Универзитет у Крагујевцу
Природно – математички факултет
др Владимир Марковић
vmarkovic@kg.ac.rs
Експериментална вежба:

Апсорпција γ зрачења

Када сноп γ зрачења пролази кроз материју, његов интензитет опада услед интеракције зрачења са материјом. При интеракцији γ зрачења дешавају се различити ефекти, али је сам процес резултат међусобног дејства између γ кванта и атома. Један γ квант може да прође непромењен кроз материју али увек постоји вероватноћа да ступи у интеракцију са неким атомом и да притом буде апсорбован или расејан.

Доминантни видови интеракције γ зрачења са материјом су:

1. фотоелектични ефекат,
2. Комптоново расејање и
3. Производња електронско-позитронског пара.

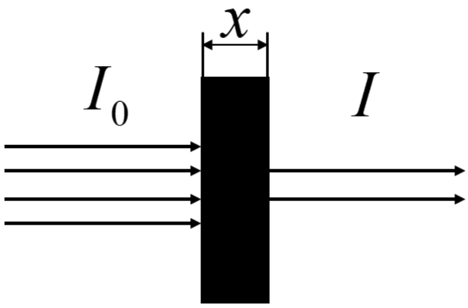
Фотоелектични ефекат је процес интеракције који је доминантан при ниским енергијама γ зрачења и у питању је процес у коме долази до апсорпције кванта γ зрачења. Притом долази до јонизације атома са којим је γ квант интераговао. Компроново расејање је процес расејавајућег типа у коме γ квант губи део своје енергије и расејава се под одређеним углом у односу на првобитан правац кретања. Производња парова је процес при коме γ квант у пољу неког тела, најчешће језгра атома, формира електронско – позитронски пар. Овај процес има доњи лимит одигравања и не може се десити уколико је енергија упадног γ зрачења мања од масе мировања електрона и позитрона, тј. $1{,}024\,\mathrm{MeV}$ -а. Вероватноћа интеракције у којој долази до производње парова расте са енергијом γ зрачења.

Како би проучили на који начин се мења интензитет зрачења, услед његове интеракције са одређеним материјалом, потребно је имати уско колимисан сноп γ зрачења, који треба пропустити кроз одговарајући материјал, као на слици 1. При апсорпцији или расејању γ кваната у снопу зрачења, смањује се број γ – кванта присутних у снопу. Вероватноћа интеракције γ зрачења је сразмерна дебљини слоја материјала x, а коефицијент пропорционалности се зове линеарни коефицијент слабљења зрачења и обележава се са μ. Ако са I обележимо интензитет зрачења, онда ће при проласку кроз слој материјалне дебљине dx, I опасти за dI:

$$dI = -I \cdot \mu \cdot dx \qquad (1)$$

Знак минус означава да интензитет зрачења опада. Интеграцијом израза (1), узимајући да у обзир граничне услове ($I = I_0$ када је $x = 0$) добија се закон апсорпције γ зрачења:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}. \qquad (2)$$



Слика 1. Шематски приказ апсорпције зрачења

Вредност коефицијента апсорпције се мења са таласном дужином зрачења. Ако се сноп састоји из више таласних дужина, за сваку компоненту зрачења једне таласне дужине важи закон дат изразом (2). Линеарни коефицијент апсорпције зрачења је сума три коефицијента који услед фотоефекта, Комптоновог расејања и процеса производње парова:

$$\mu = (\tau + \sigma_c + k) \cdot N, \qquad (3)$$

где је N број атома мете по јединици запремине. Јединица коефицијента слабљења је m^{-1}. Сам коефицијент слабљења је збир коефицијента апсорпције μ_a (апсорпциони процеси су фотоефекат и производња парова) и коефицијента расејања μ_S (Комптонов ефекат је расејавајући процес):

$$\mu = \mu_a + \mu_S \qquad (4)$$

Поред линеарног коефицијента слабљења у употреби је и масени коефицијент слабљења који је дат као:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (5)$$

где је ρ густина материјала. Масени коефицијенти се користе знатно више од линеарних, јер је на датој енергији зрачења он независан од физичког стања материје (за воду μ_m је исти без обзира на агрегатно стање материје, што није случај са линеарном коефицијентом). Јединица за масени коефицијент слабљења је $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$.

Масени коефицијент смеше или једињења се може добити преко Браговог сумационог правила:

$$\frac{\mu}{\rho}=\sum_i \omega_i (\frac{\mu}{\rho})_i \,, \qquad (6)$$

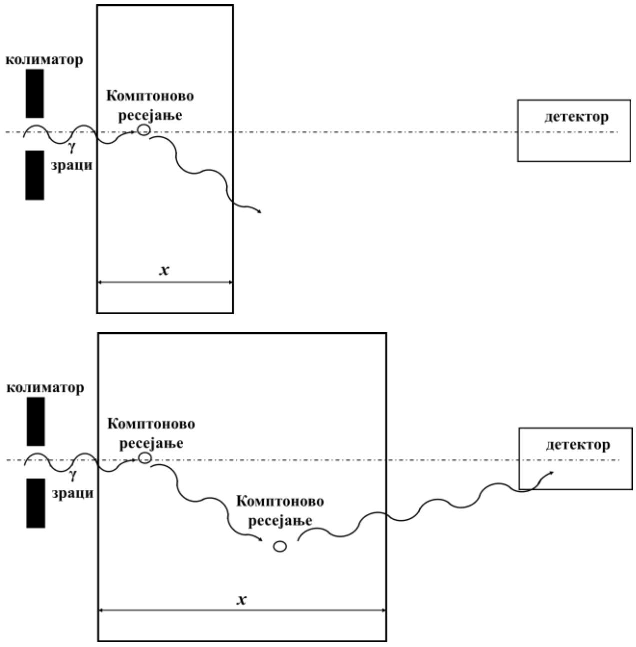
где је са *i* означена *i*-та материја, а ω_i је њен масени удео у смеши.

Потребно је напоменути да закон апсорпције γ зрачења важи у случајевима када је сноп зрачења, чији се интензитет слабљења посматра, уско колимисан и када апсорбент није превелике дебљине. Ове лимитације потичу од чињенице да се при било којој врсти интеракције γ квант сматра уклоњеним из снопа. На слици 2а је дат шематски приказ интеракције када су полазне претпоставке испуњене. На слици 2б је дат шематски приказ интеракције у којој апсорбент није „танак“ и може доћи до вишеструког расејања, које за последицу може имати додатну апсорпцију. Дебљина апсорбента који се може сматрати танким зависи од енергије γ кванта и од самог материјала апспрбента, али у сушини је неопходно да дебљина буде таква да γ зраци који се комптоновски расејавају у просеку доживе само једну интеракцију (дебљина материјала не треба бити већа од средњег слободног пута γ зрачења у датом материјалу). У случају испуњавања услова вишеструког расејања, γ квант који је интераговао и који се сматра изузетим из снопа, може се вишеструко расејати натраг ка детектору. На тај начин повећањем дебљине апсорента, почев од одређене дебљине интензитет зрачења почиње да расте (уместо да експоненцијелно опада) и овај ефекат се назива нагомилавање зрачења. На први поглед ово може изгледати контрадикторно са законима одржања, али се мора водити рачуна да интензитет зрачења представља број кваната који се детектују у јединици времена и нема веза са енергијом коју кванти зрачења носе, тј. не долази до нарушавања закона одржања енергије.

У случају ефекта нагомилавања зрачења, једначина (2) се модификује у облик:

$$I=I_0 P(x) e^{-\mu x}\,, \qquad (7)$$

где је $P(x)$ полиномна функција.



Слика 2. Шематски приказ интеракције γ кванта са апсорбентом у случају различите дебљине апсорбента. На доњој слици је приказан случај вишеструког расејања које води до детекције γ зрака.

Коефицијент апсорпције зависи од материјала кроз који се зрачење простире. У овој вежби потребно је одредити коефицијент апсорпције за олово. Интензитет γ зрачења се мери Гајгер-Милеровим бројачем који је у могућности да региструје интеракцију једног γ кванта са атомима у бројачу. Међутим, никада се не мери директно интензитет зрачења који потиче од извора. Наиме, сваки бројач показује известан број импулса и када није изложен зрачењу. То је последица присуства космичког зрачења и радиоактивног зрачења из атмосфере као и Земљине коре, тј. фона. Вредност фона је карактеристичан параметар који зависи од мерног уређаја и средине. Првенствено је потребно одредити фон зрачења – број импулса у јединици времена који бројач детектује без присуства извора зрачења, I_f. Потом измерити број импулса у јединици времена од зрачења и неизбежног фона, I_m. Интензитет зрачења самог извора одређујемо налазећи разлику

$$I = I_\mathrm{m} - I_\mathrm{f}\,. \tag{8}$$

За одређивање коефицијента апсорпције користи се апаратура која се састоји од Гајгер-Милеровог бројача, извора зрачења, оловних плочица различитих дебљина и статива на који се апаратура монтира. По монтирању апаратуре потребно је прво измерити интензитет зрачења када нема апсорбента, $I\left(x=0\right)=I_0$. Затим изнад цеви бројача редом додавати оловне плоче и мерити интензитет зрачења за одређени временски период. Дебљину плочица измерити микрометром и то усредњавањем минимум три независне мерене дебљине. Више мерења је потребно извршити јер оловне плочице нису идеалне и дебљина плочице може да варира.

Зависност броја импулса у јединици времена, тј. интензитета зрачења, I, од дебљине апсорбента је експоненцијалног карактера, дат једначином (2). Да би се одредио коефицијент слабљења потребно је извршити линеаризацију једначине (2) и притом се добијају неки од могућих израза:

$$\ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \mu x\,,\ \ln I_0 = \ln I - \mu x\ , \dots \tag{9}$$

Цртањем графика и одређивањем нагиба праве може се одредити коефицијент апсорпције γ зрачења.

ГМ бројачи најчешће региструју како и само име детектора каже број импулса, N, у одређеном временском интервалу, за који се мерење врши, t. Интензитет зрачења се у том случају израчунава као број импулса у јединици времена:

$$I = \frac{N}{t}. \tag{10}$$

Физичке величине које се у оваквој експерименталној поставци директно мере су број импулса N, временски интервал t, и дебљине плочица, d. Ове три физичке величине представљају директно мерене величине и свака грешка која се одређује у овом експерименту мора се изразити преко грешке мерења ове три величине. Одређивање грешки изведених физичких величина и статистичка обрада резултата мерења је дата у додатку ове вежбе.

Задаци:

1. Измерити фон зрачења у временском интервалу од t_f, $I_\mathrm{f} = \dfrac{N_\mathrm{f}}{t_\mathrm{f}}$.

2. Поставити апаратуру и одредити број импулса, N_0, када између извора и детектора нема апсорпционог медијума. Временски период мерења, t_0, треба да буде изабран тако да релативна грешка буде мања од 5% (видети додатак). Интензитет зрачења је $I_{\mathrm{m}0} = \dfrac{N_0}{t_0}$.

3. Између детектора и извора додавати оловне плоче и одредити број импулса, $N_{\mathrm{m}i}$, са релативном грешком мањом од 5%. Интензитет зрачења износи $I_{\mathrm{m}i} = \dfrac{N_i}{t_i}$. Претходно одредити појединачне дебљине плочица, d_j, за три независна мерења плочице $d_{jk}, k = 1,2,3$, тј. $d_j = \dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} d_{jk}$. Дебљина апсорбера, x_i, је сума дебљина плочица наслаганих на детектор $x_i = \sum_{j=1}^{i} d_j$ (плочице се мере назависно по три пута, а дебљина абсорбера представља суму дебљина наслаганих плочица).
4. Податке бележити у Табели 1.

Број мерења, i	d_{jk} $k = 1,2,3$	d_j $d_j = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} d_{jk}$	$x_i = \sum_{j=1}^{i} d_j$	$I_{\mathrm{m}i} = \frac{N_i}{t_i}$	$I_i = I_{\mathrm{m}i} - I_{\mathrm{f}}$
0.	0	0	0		
1.	$d_{11} =$ $d_{12} =$ $d_{13} =$				
2.	$d_{21} =$ $d_{22} =$ $d_{23} =$				

5. На основу линеаризације дате једначином (9) нацрати одговарајући график са одговарајућим грешкама. Очекује се линеарна зависност на основу које се може одредити коефицијент апсорпције гама зрачења, одређујући коефицијент правца праве. У пракси доћи ће до одступања од линеарности поготово за мале дебљине олова, јер извори зрачења обично садрже више линија гама зрачења које су различите енергије. μ зависи од енергије зрачења, као и од средине, тако да ће гама зрачење различитих енергија различито слабити и доћи ће до одступања од линеарности. За веће дебљине олова у примарном снопу зрачења остаће претежно гама зраци већих енергија и крива ће постепено прећи у праву.
6. По одређивању коефицијента апсорпције наћи дебљину полуапсорпције, $d_{1/2}$. Дебљина полуапсорпције је дебљина олова која ће интензитет зрачења смањити на половину.
7. Одредити грешке тражених величина.

Експериментални подаци

$N_{\mathrm{f}} = 70$ imp, $t_{\mathrm{f}} = 300\,\mathrm{s}$

$i\,/\,j$	$d_{\mathrm{j1}}\,[\mathrm{mm}]$	$d_{\mathrm{j2}}\,[\mathrm{mm}]$	$d_{\mathrm{j3}}\,[\mathrm{mm}]$	$N_i\,[\text{broj impulsa}]$	$t_i\,[\mathrm{s}]$
0.	0	0	0	1121	163
1.	1	0.96	0.92	1112	174
2.	0.98	0.99	0.97	1108	186
3.	1.04	1.01	0.99	1111	198
4.	1.02	1.05	1.01	1113	216
5.	1.66	1.85	1.71	1120	243
6.	1.78	1.84	1.64	1101	267
7.	1.94	2.04	2.45	1121	306
8.	2.37	2.46	2.44	1139	368

Додатак: Одређивање грешака мерених резултата

Физичке величине које су мерене у овој вежби су време, t, дебљина оловних плочица, d_{jk}, и број импулса извора+фона, I_{m} и фона, I_{f}.

Временски интервали мерења у овој вежби износе неколико минута. Уколико за апсолутну грешку мерења одредимо $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, релативна грешка за временски интервал од $t = 180\,\mathrm{s}$ би износила:

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} \cdot 100\% = \frac{1\,\mathrm{s}}{180\,\mathrm{s}} \cdot 100\% \approx 0,56\%. \tag{11}$$

За дуже временске интервале грешка мерења ће бити још мања. Овако малу вредност грешке која се прави при мерењу времена можемо занемарити и време сматрати константном величином при одређивању грешке изведених величина које су у функционалној зависности од времена.

Апсорбент у овој вежби представља олово у виду оловних плоча одређене дебљине, d_j, које се слажу и тиме повећава укупна дебљина апсорбера, x_i. Оловне плочице нису идеалног облика и дебљина им се разликује на различитим деловима, али та разлика није исувише драстична. Због постојања разлике у дебљини плочице, дебљина се мери на три различита положаја, $d_{jk}, k = 1,2,3$, и усредњавањем се добија референтна вредност дебљине оловне плочице.

$$d_j = \frac{1}{3}(d_{j1} + d_{j2} + d_{j3}) \tag{12}$$

При мерењу дебљина плочица микрометром за систематску грешку мерења се може узети најмањи подеок микрометра, $\Delta_{\mathrm{si}}\left(d_{jk}\right) = 10\,\mu\mathrm{m}$, где индекс **si** означава систематску грешку. Тада је:

$$\frac{\Delta_{\mathbf{si}}\left(d_j\right)}{d_j} = \frac{3 \cdot \Delta d}{d_{j1} + d_{j2} + d_{j3}}, \text{ тј. } \Delta_{\mathbf{si}}\left(d_j\right) = 10\,\mu\mathrm{m}. \tag{13}$$

Како је дебљина плочица одређена на основу већег броја мерења систематска грешка није једини извор грешки. Одступање појединачних мерења од средње вредности може бити знатно веће од сиситематске грешке и у том случају потребно је у обзир узети случајну грешку мерења, која је последица неуниформне дебљине самих плочице. Маргинални случајеви који се најчешће сусрећу у пркси су да једна од ова два типа грешки преовладава (систематска-**si** или случајна-**sl**) и друга се може занемарити. У случају када су систематска и случајна грешка приближно исте (истог реда величине), обе грешке се морају узети у обзир. Овај критеријум може варирати од мерења до мерења и за свако појединачно мерење потребно је одредити критеријум одређивања грешке. Систематска грешка мерења дебљине плочице се дефинише стандардном девијацијом (мера одступања од средње вредности):

$$\sigma_{d_j} = \sqrt{\frac{1}{3-1}\sum_{k=1}^{3}\left(d_j - d_{jk}\right)^2} \tag{14}$$

Апсолутна систематска грешка се одређује како стандардна грешка са степеном поверења k:

$$\Delta_{\text{sl}}\left(d_j\right) = \text{k}\frac{\sigma_{d_j}}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Степен поверења k дефинише стандардну несигурност и у оваквим експериментима, за степен поверења се може узети вредност k = 1. Физичка интерпретација ове величине је да је при степену поверења k = 1 вероватноћа да се стварна средња вредност налази у интервалу $d_j \pm \Delta_{\mathbf{sl}}\left(d_j\right)$ износи приближно 68%.

Уколико је $\Delta_{\mathbf{si}} >> \Delta_{\mathbf{sl}}$ систематска грешка преовладава и случајна се може занемарити, тј. апсолутна грешка је $\Delta d_j = \Delta_{\mathbf{si}}\left(d_j\right)$, и обрнуто $\Delta d_j = \Delta_{\mathbf{sl}}\left(d_j\right)$. У случају када је $\Delta_{\mathbf{si}} \sim \Delta_{\mathbf{sl}}$ апсолутна грешка се одређује изразом:

$$\Delta d_j = \sqrt{\frac{\left[\Delta_{\mathbf{si}}\left(d_j\right)\right]^2}{3} + \left[\Delta_{\mathbf{sl}}\left(d_j\right)\right]^2} \tag{16}$$

Дебљина апсорбера се добија слагањем оловних плочица тако да је:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} d_j, \tag{17}$$

где је одговарајућа грешка:

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta d_j. \tag{18}$$

За мерење броја импулса извора и фона користи се Гајгер Милеров бројач. Број импулса је довољно велики и измерене вредности ће бити према Гаусовој расподели. Уколико је измерени број импулса $N_{\text{m}i}$, стандардна девијација Гаусове расподеле за измерени број импулса је:

$$\sigma_{N_{\text{m}i}} = \sqrt{N_{\text{m}i}}, \tag{19}$$

Исто важи и за број импулса фона:

$$\sigma_{N_\mathrm{f}} = \sqrt{N_\mathrm{f}} \tag{20}$$

Како је $I_{\mathrm{m}i} = \dfrac{N_{\mathrm{m}i}}{t_i}$ и $I_\mathrm{f} = \dfrac{N_\mathrm{f}}{t_\mathrm{f}}$, где се притом грешка мерење времена занемарује, стандардне девијације интензитета зрачења могу се одредити релацијама:

$$\sigma_{I_{\mathrm{m}i}} = \frac{\sigma_{N_{\mathrm{m}i}}}{t_i} \text{ и } \sigma_\mathrm{f} = \frac{\sigma_{N_\mathrm{f}}}{t_\mathrm{f}}. \tag{21}$$

Интензитет зрачења који потиче од самог извора одређује се релацијом (8), тј. $I = I_\mathrm{m} - I_\mathrm{f}$ на основу чега је стандардна девијација и стандардна грешка интензитета зрачења који потиче од извора:

$$\Delta_{I_i} = \mathrm{k}\sigma_{I_i} = \mathrm{k}\sqrt{\sigma^2_{I_{\mathrm{m}i}} + \sigma^2_\mathrm{f}}\,. \tag{22}$$

Резултате приказати са стандардном несигурношћу k=1, одакле следи да је:

$$I_i \pm \sigma_{I_i}, \tag{23}$$

што практично значи да је вероватноћа да при поновном мерењу и одређивању интензитета зрачења под истим условима вредност буде у интервалу $(I_i - \sigma_{I_i}, I_i + \sigma_{I_i})$ износи 0.683. Другим речима постоји 68.3% шансе да при поновном мерењу добијемо резултат чија је вредност у датом интервалу. Ово је последица стохасничке (непредвидиве) природе зрачења, због чега не можемо са апсолутном сигурношћу поново добити исте резултате мерења под истим условима. С обзиром да се за конкретне услове врши само једно мерење (за једну дебљину апсорбера број импулса је мерен само једном) не постоји средња вредност и измерена вредност се изједначава са средњом. Резултати оваквих процеса подвргавају се Гаусовој расподели и на основу тога можемо тврдити да вероватноћа да се стварна средња вредност нађе у интервалу $(N - \sigma_N, N + \sigma_N)$ износи 0.638. За интервал $(N - 3\sigma_N, N + 3\sigma_N)$ та вероватноћа износи 0.997 и представља сигурну несигурност.

Пропагација грешке

Уопштено посматрајући уколико су $x, y, z, ...$ директно мерени импулси или случајне физичке величине за које можемо одредити $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, ...$, тј. уколико су у питању величине које имају случајну грешку (варирају од мерења до морења) онда стандардна девијација било које величине $u = u(x, y, z, ...)$ изведене од случајних се може одредити као (у случају да су величине некорелисане, што је случај у нашем експерименту):

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \qquad (24)$$

На другој страни уколико се ради о величинама које имају систематску грешку одређену искључиво грешком мерног инструмента, пропагацију грешке физичке величине $u = u(x, y, z, \ldots)$ која је изведена од директно мерених величина $x, y, z, \ldots$ које имају систематску грешку одређујемо формлом:

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots \qquad (25)$$

На основу израза (24) и (25) кажемо да грешке случајних величина пропагирају у квадратима, док грешке величина које имају систематску грешку пропагирају линеарно.

Употребом релације (24) може се одредити стандардна девијација члана $\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$ у једној од понуђених линеаризација једначином (9). Нека је $u_i = u(I_0, I_i) = \ln\left(\frac{I_0}{I_i}\right)$ и на основу (24) добија се :

$$\sigma_{u_i} = \sigma\left[\ln\left(\frac{I_0}{I_i}\right)\right] = \sqrt{\frac{\sigma_{N_0}^2}{N_0^2} + \frac{\sigma_{N_i}^2}{N_i^2}} \, . \qquad (26)$$

Како је $\sigma_{N_0} = \sqrt{N_0}$ и $\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i}$ добијамо:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_i}} \, , \qquad (27)$$

што је стандардно одступање или стандардна девијација тј. грешка за $\ln\left(\frac{I_0}{I_i}\right)$ (и систематска и случајна, с обзиром да је степен поверења k = 1).

Из израза $\ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \mu x$, μ се одређује скидањем правца криве са графика из задатка 6 на основу једначне праве кроз две неексперименталне тачке (експерименталне тачке су дозвољене уколико леже идеално на правој):

$$\mu = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{I_B}\right) - \ln\left(\frac{I_0}{I_A}\right)}{x_B - x_A}. \tag{28}$$

Тачке за одређивање графика се бирају између прве и друге и претпоследње и последње експерименталне тачке. Грешка за μ је:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta\left[\ln\left(\frac{I_0}{I_B}\right)\right] + \Delta\left[\ln\left(\frac{I_0}{I_A}\right)\right]}{\ln\left(\frac{I_0}{I_B}\right) - \ln\left(\frac{I_0}{I_A}\right)} + \frac{\Delta x_B - \Delta x_A}{x_A - x_A}. \tag{29}$$

Узима се да је

$$\Delta\left[\ln\left(\frac{I_0}{I_B}\right)\right] = \sigma\left[\ln\left(\frac{I_0}{I_B}\right)\right], \tag{30}$$

што је одређено изразом (26) односно (27).

Грешку за $d_{1/2}$ из задатка 7 самостално одредити.

За крај треба напоменути да при обради резултата мерења која су случајне природе, потребно је одредити стандардну грешку мерења рачунајући стандардне девијације и пропагирајући грешку у квадратурама. По одређивању стандардне грешке, оне се надаље могу третирати као систематске грешке и пропагирати линеарно, релацијом (25). Међутим исправније би било да се грешке третирају као случајне грешке и пропагирају релацијом (24) у потпуности. Када се мешају систематска и случајна грешка, могуће је да се једна преведе у другу, или обратно и надаље користе само систематске или случајне. Правилније би било користити случајне грешке, али је рачунски једноставније и опште прихваћено да се случајне грешке преводе у систематске и надаље ради само са овим тпом грешки.

Извести израз за грешку $\Delta\mu$ користећи релацију (24) (третирајући у потпиности методом случајних грешки) и упоредити добијену вредност са вредношћу добијену релацијом (29).